Ueber die

elliptischen und die hyperbolischen

Cono-Cunei.

Inaugural-Dissertation

welche unter Zustimmung

der hochlöblichen philosophischen Fakultät
zu Marburg.

zur Erlangung der Doctor-Würde

einreicht

Carl Pabst
aus Finsterwalde.

Marburg.
Druck von Joh. Aug. Koch
1884.

Seinem lieben Vater

Carl Otto Pabst

als Zeichen kindlicher Dankbarkeit

gewidmet vom

Verfasser.

Als nach dem Wiederaufleben der Wissenschaften im Abendlande die Mathematiker des 17. Jahrhunderts, an die Resultate der Geometer des Alterthums anknüpfend, zu selbstständigen Forschungen und Untersuchungen übergingen, war es Joh. Wallis, der den Kegel dadurch gleichsam verallgemeinerte, dass er die erzeugenden Geraden desselben nicht in einen Punkt zusammenlaufen liess, sondern diese Spitze in eine Gerade auszog, bis alle erzeugenden Geraden des Kegels einer gegebenen Ebene parallel waren. Auf rein geometrischem Wege untersuchte er dann einige Schnitte dieses Körpers, den er, wie folgt, definirte: Super plana Basi, quae Circuli Quadrans erat (ut in Quadrantali Cono vel Cylindro) erectum insistebat Solidum; cujus Altitudo (pro arbitrio sumenda) erat dupla Radii Quadrantis istius Circularis: Et a singulis Peripheriae Quadrantalis punctis, ductae ad verticem rectae, coibant, non in Puncto (ut in Apice Coni), nec in Quadrante parallelo (ut in Quadrantali Cylindro), sed in Linea recta, ut in acie Cunei. Quamobrem ei nomen feci Cono-Cunei; ut qui in Base Conum repraesentet; in Vertice, Cuneum [1]).

Dieser Körper hat später die Veranlassung zu einer Gruppe von geradlinigen Flächen gegeben, welche die Einen Keilflächen[2]), die Anderen Conoidflächen[3]) nennen, und deren Definition demnach folgende ist: Gegeben ist eine Ebene, die Direktorebene, eine auf dieser Ebene senkrecht stehende Gerade und eine Curve, die Leitlinie, deren Ebene auf der Directorebene senkrecht steht. Eine Gerade bewegt sich

1) cf. J. Wallis: Opera mathematica. vol. II. pag. 681 ff.
2) cf. O. Schlömilch; Analytische Geometrie des Raumes.
3) cf. J. Salmon: Analytische Geometrie des Raumes.

längs der Curve so hin, dass sie stets der Directorebene parallel bleibt und durch die gegebene Gerade geht.

Unsere Aufgabe ist es, aus dieser Gruppe diejenigen Flächen zu untersuchen, deren Leitlinie ein Kegelschnitt ist, unter der näheren Voraussetzung, dass die singuläre Kante, durch welche alle Erzeugenden gehen, mit einer Axe des Kegelschnitts in einer Ebene liegt, welche auf der Ebene der Leitlinie senkrecht steht. Wir wollen in Folgendem diese Flächen als Cono-Cunei bezeichnen, und zwar je nachdem der Leitkegelschnitt eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist, als elliptischen, parabolischen und hyperbolischen Cono-Cuneus.

Jeder Kegelschnitt hat nun aber im Allgemeinen zwei Axen, welche aufeinander senkrecht stehen. Es giebt demnach 6 Cono-Cunei, von denen aber, wie sich nachher zeigen wird, die beiden elliptischen identisch sind. Anders verhält es sich wenn die Leitlinie eine Hyperbel ist. Wir wollen denjenigen Cono-Cuneus, welcher entsteht, wenn die singuläre Kante der reellen Axe der Leithyberbel parallel ist, als getheilten hyberbolischen Cono-Cuneus, und denjenigen, bei welchem die singuläre Kante der imaginären Axe der Leithyberbel parallel ist, als einfachen hyberbolischen Cono-Cuneus bezeichnen.

Ist schliesslich die Leitlinie eine Parabel, so wissen wir, dass dieselbe nur eine im Endlichen liegende Axe hat. Denjenigen parabolischen Cono-Cuneus, dessen singuläre Kante dieser Axe parallel ist, wollen wir den ersten nennen. Um nun zu ermitteln, wie sich die Sache beim zweiten parabolischen Cono-Cuneus gestaltet, denken wir uns zunächst eine im Endlichen liegende, der Ebene der Leitparabel parallele Gerade, deren Projection auf die Ebene der Leitlinie auf der Parabelaxe senkrecht steht, als singuläre Kante. Bewegt sich diese Gerade parallel der Parabelebene nach dem Unendlichen zu, so werden die erzeugenden Geraden allmählich einander parallel. Da nun die zweite Axe der Parabel im Unendlichen liegt, so muss auch die singuläre

Kante des betreffenden Cono-Cuneus ins Unendliche rücken. Daraus folgt, dass der zweite parabolische Cono-Cuneus im Allgemeinen ein parabolischer Cylinder ist. Ist nun der Abstand der singulären Kante von der Leitparabelebene eine endliche Grösse, so ist das Verhältniss dieser Grösse zur Entfernung der zweiten Axe der Parabel von deren Scheitel unendlich klein, d. h. die Erzeugenden fallen in die Parabelebene. Ist dagegen die Entfernung der singulären Kante von der Leitparabelebene selbst unendlich gross, so kommt es darauf an, welchen Werth das Verhältniss dieser Entfernung zur Entfernung der zweiten Axe vom Scheitel der Parabel annimmt. Dieses Verhältniss ist gleich der trigonometrischen Tangente des Neigungswinkels der Erzeugenden gegen die Leitparabel-Ebene. Man erhält also je nach dem Werthe dieses Verhältnisses einen schiefen oder einen geraden parabolischen Cylinder. Bemerkt sei hier noch, dass die Kegelschnitte in speciellen Fällen zu Geraden degeneriren können. Alsdann erhält man die aus der analytischen Geometrie des Raumes bekannten hyperbolischen Paraboloide.

Der erste parabolische Cono-Cuneus ist von Hochheim ausführlich behandelt (Grunerts Archiv Th. 53 p. 350—363). Wir können uns demnach auf die Betrachtung der 3 Flächen, des elliptischen, des getheilten und des einfachen hyberbolischen Cono-Cuneus beschränken.

Zu dieser Untersuchung nehmen wir ein rechtwinkliges xyz-Coordinatensystem an, dessen yz-Ebene die Direktorebene und dessen xy-Ebene der Ebene des Leitkegelschnitts parallel ist. Die erzeugenden Geraden sollen durch die x-Axe gehen. Bevor wir nun auf die definirten Cono-Cunei eingehen, wollen wir allgemein die Gleichung der Flächen ableiten, deren Leitlinie durch die Gleichungen:

$$(1). \quad . \quad . \quad . \quad \eta = f(\xi); \ \zeta = c$$

dargestellt wird. Nach den gemachten Voraussetzungen muss jede erzeugende Gerade den Gleichungen genügen:

$$(2). \quad . \quad . \quad . \quad x = v; \ y = uz.$$

Hierbei sind u und v beliebige Grössen, zwischen denen eine

Bedingungsgleichung besteht, welche ausdrückt, dass die Erzeugenden die Leitlinie (1). schneiden, und die daher aussagt, dass die Coordinaten xyz den Gleichungen (1) genügen. Für dieselbe ergiebt sich also:

(3). . . . $c \cdot u = f(v)$.

Eliminirt man nun u und v aus den Gleichungen (2). und (3)., so erhält man als Gleichung der gesuchten geradlinigen Fläche:

(4). . . . $cy = z \cdot f(x)$.

I.
Der elliptische Cono-Cuneus.

Gehen wir nun zu unserer eigentlichen Aufgabe über, indem wir nun zunächst den elliptischen Cono-Cuneus in Betracht ziehen. Die Gleichungen der Leitellipse seien:

(5). . . . $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $z = c$.

Als Gleichung des elliptischen Cono-Cuneus ergiebt sich demnach:

$$c^2 y^2 = \frac{b^2}{a^2} z^2 (a^2 - x^2)$$

oder, wenn wir c^2 für $\frac{a^2 c^2}{b^2}$ setzen:

(6). . . . $c^2 y^2 = z^2 (a^2 - x^2)$.

Aus dieser Gleichung geht zunächst hervor, dass der absolute Werth von x nicht grösser als a sein darf, weil sonst y und z imaginär werden. Die Fläche (6) erstreckt sich demnach von $x = -a$ bis $x = +a$.

Für die Projection der Durchschnittscurve dieser Fläche mit der Ebene $z = h$ auf die xy-Ebene ergiebt sich:

(7). . . . $\frac{x^2}{a^2} + \frac{c^2 y^2}{a^2 h^2} = 1$.

Diese Durchschnittscurve ist daher im Allgemeinen eine Ellipse mit den Halbaxen a und $\frac{a h}{c}$, deren Mittelpunkt

auf der z-Axe liegt und deren Axen bezüglich in die Ebenen der xz und der yz fallen. Für $h = o$ geht die ausgeschnittene Ellipse in die x-Axe, für $h = c$ in einen Kreis mit dem Radius a über. Die Ellipsen zwischen $h = -c$ und $h = +c$ sind Ellipsen, deren grosse Axen $= 2a$ in der xz-Ebene, deren kleine Axen $= 2\frac{ah}{c}$ in der yz-Ebene liegen; diejenigen dagegen zwischen $h = -\infty$ bis $h = -c$ und zwischen $h = c$ bis $h = \infty$ sind solche, deren kleine Axen $= 2a$ in der xz-Ebene und deren grosse Axen $= 2\frac{ah}{c}$ in der yz-Ebene liegen.

Zunächst folgt hieraus, dass der Cono-Cuneus von Wallis mit einem Kreise als Leitlinie identisch mit dem vorgelegten elliptischen Cono-Cuneus ist, denn auch hierbei wird ein Kreis und durch eine dem Kreise parallele Ebene eine Ellipse ausgeschnitten. Ferner ist ersichtlich, dass es gleichgültig ist, welcher von beiden Axen der Leitellipse die singuläre Kante parallel ist; denn ist die singuläre Kante der grossen Axe der Leitellipse parallel, ist also $a > b$, dann ist $h = \frac{a}{b}c > c$, wobei c die Entfernung des Leitkegelschnitts von dieser Kante und h die Entfernung des Kreisschnittes von derselben bedeutet, d. h. der Kreisschnitt liegt jenseits der Leitellipse von der singulären Kante aus, und wenn $a < b$, d. h. wenn die singuläre Kante der kleinen Axe der Leitellipse parallel ist, so liegt der Kreisschnitt zwischen der singulären Kante und dem Leitkegelschnitt. Im Wesentlichen wird dadurch also nichts geändert, womit die Behauptung in der Einleitung bewiesen ist.

Aus diesen Erörterungen geht hervor, dass der elliptische Cono-Cuneus auch so entstanden gedacht werden kann, dass sich eine Ellipse, deren eine Axe constant, die andere variabel ist, parallel mit sich selbst bewegt, während die variable Axe proportional dem Abstande der Ellipsenebene von einer gegebenen Ebene wächst.

Ferner erhält man für die Projection der Durchschnittscurve des elliptischen Cono-Cuneus (6) mit der Ebene $y = k$ auf die xz-Ebene:

$$(8). \quad . \quad . \quad . \quad z^2 (a^2 - x^2) = c^2 k^2.$$

Diese Gleichung stellt im Allgemeinen eine Curve vierten Grades dar, welche die z-Axe in den Punkten $x = o$, $z = \pm \frac{ck}{a}$ schneidet. Sie ist in allen ihren Punkten convex nach der x-Axe hin und besteht aus zwei ins Unendliche sich erstreckenden Zweigen, welche symmetrirch zu den Axen der x und der z liegen und sich asymptotisch den beiden Geraden $x = \pm a$ nähern. Für $k = o$ geht diese Curve über in die x-Axe von $-a$ bis $+a$ und in die beiden Geraden $x = \pm a$.

Schneiden wir schliesslich die vorgelegte Fläche durch die Ebene $x = l$, so ergiebt sich für die Projection der Durchnittscurve auf die yz-Ebene:

$$(9). \quad . \quad . \quad . \quad z = \pm \frac{c}{\sqrt{a^2 - l^2}} y.$$

Daraus folgt, dass jede zur yz-Ebene parallele Ebene, deren Abstand von der yz-Ebene absolut kleiner als a ist, den elliptischen Cono-Cuneus (6) im Allgemeinen in zwei Geraden schneidet, welche durch die x-Axe gehen und mit der xz-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Für $l = \pm a$ fallen diese beiden Geraden in eine einzige zusammen. Alle diese ausgeschnittenen Geraden sind die Erzeugenden des elliptischen Cono-Cuneus.

Verweilen wir noch etwas bei diesen Resultaten. Wir haben gefunden, dass jede zur xy-Ebene parallele Ebene den elliptischen Cono-Cuneus (6) in einer Ellipse schneidet. Beachten wir die Brennpunkte derjenigen von diesen Ellipsen, welche zwischen $h = -c$ und $h = +c$ liegen, so ergiebt sich als Abstand eines solchen Brennpunktes von der z-Axe $\sqrt{a^2 - \frac{a^2 z^2}{c^2}}$. Man erhält demnach für den geometrischen Ort dieser Brennpunkte:

$$(10). \quad \ldots \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

d. h. in Worten: Der geometrische Ort der Brennpunkte aller Ellipsen, welche durch Ebenen parallel der xy-Ebene zwischen $z = -c$ und $z = +c$ aus dem elliptischen Cono-Cuneus (6) ausgeschnitten werden, ist eine Ellipse in der xz-Ebene mit den Halbaxen a und c, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist und deren Axen bezüglich in die Axen der x und der z fallen.

Ferner haben wir gesehen, dass diejenigen zur xy-Ebene parallelen Ebenen, deren Abstand von der xy-Ebene absolute grösser als c ist, den elliptischen Cono-Cuneus (6) in Ellipsen schneiden, deren grosse Axen in der yz-Ebene liegen. Als Gleichung des geometrischen Ortes der Brennpunkte derselben erhält man:

$$(11). \quad \ldots \quad \frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

Der geometrische Ort dieser Brennpunkte ist also eine Hyperbel in der yz-Ebene mit den Halbaxen c und a, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist, deren reelle Axe $2c$ in der z-Axe und deren imaginäre Axe $2a$ in der y-Axe liegt.

Wir wollen noch einige schiefe Schnitte des elliptischen Cono-Cuneus (6) analytisch untersuchen, welche sich bei Wallis rein geometrich behandelt finden. Zunächst schneiden wir ihn durch die auf der xy-Ebene senkrechte Ebene, welche mit der x-Axe den Winkel φ bildet und von der y-Axe das Stück δ abschneidet. Um die entsprechende Durchschnittscurve zu untersuchen, führen wir die Coordinatentransformation ein:

$$x = x' \cos\varphi - y' \sin\varphi$$
$$y = \delta + x' \sin\varphi + y' \cos\varphi$$
$$z = z'.$$

Setzen wir dann $y' = o$, so ergiebt sich als Gleichung der definirten Durchschnittscurve:

$$(12). \quad \ldots \quad c^2 (\delta + x' \sin\varphi)^2 = z'^2 (a^2 - x'^2 \cos^2\varphi).$$

Daraus folgt:

$$\frac{dz'}{dx'} = \pm \frac{c\,(\delta x' \cos^2\varphi + a^2 \sin\varphi)}{(a^2 - x'^2\cos^2\varphi)^{3/2}}$$

$$\frac{d^2z'}{dx'^2} = \pm \frac{c\cos^2\varphi\,(2\delta x'^2\cos^2\varphi + 3a^2x'\sin\varphi + a^2\delta)}{(a^2 - x'^2\cos^2\varphi)^{5/2}}.$$

Bei der näheren Discussion haben wir 3 Fälle zu unterscheiden:

1) $\delta\,cosec\,\varphi < a\,sec\,\varphi$ oder $\delta < a\,tg\,\varphi$. Alsdann besteht die Durchschnittscurve vierten Grades aus zwei symmetrischen Zweigen welche sich im Punkte $x' = -\delta\,cosec\,\varphi$, $z' = o$ schneiden. Die beiden Zweige schneiden die z'-Axe in den Punkten $x' = o$, $z' = \pm\frac{c\delta}{a}$ und erstrecken sich für $x' = \pm a\,sec\,\varphi$ nach beiden Seiten der z'-Axe ins Unendliche. Sie nähern sich asymptotisch den beiden Geraden $x' = \pm a\,sec\,\varphi$. Diese Curve besitzt zwei Wendepunkte, welche zur Abscisse:

$$x' = \frac{a}{4\delta\cos^2\varphi}\left\{-3a\sin\varphi + \cos\varphi\sqrt{9a^2tg^2\varphi - 8\delta^2}\right\}$$

gehören.

2) $\delta = a\,tg\,\varphi$. Dafür geht die Gleichung (12) über in:

$$c^2(a + x'\cos\varphi)\,tg^2\varphi = z'^2(a - x'\cos\varphi).$$

Die Durchschnittscurve ist alsdann vom dritten Grade. Sie liegt symmetrisch zur x'-Axe und schneidet dieselbe im Punkte $x' = -a\,sec\,\varphi$, $z' = o$. Diese Curve erstrekt sich sowohl auf der positiven als auf der negativen Seite der z'-Axe für $x' = a\,sec\,\varphi$ ins Unendliche und hat die Gerade $x' = a\,sec\,\varphi$ zur Asymptote. Im Durchschnittspunkte der Curve mit der x'-Axe steht ihre Tangente auf der x'-Axe senkrecht. Ausserdem besitzt diese Curve zwei Wendepunkte, welche zur Abscisse $x' = -a\,sec\,\varphi$ gehören.

3) $\delta > a\,tg\,\varphi$. In diesem Falle besteht die Durchschnittscurve vierten Grades aus zwei Zweigen, welche symmetrisch zur x'-Axe liegen, dieselbe aber nicht schneiden. Von der z'-Axe schneiden sie bezüglich die Stücke $\pm\frac{c\delta}{a}$ ab. Diese Curxe besitzt die beiden Asymptoten $x' = \pm a\,sec\,\varphi$.

Auf anologe Weise ergiebt sich für die Gleichung der Durchschnittscurve des elliptischen Cono-Cuneus (6) mit der Ebene senkrecht auf der xz-Ebene, welche mit der x-Axe den Winkel ψ bildet und von der z-Axe das Stück e abschneidet:

(13). . . . $c^2 y'^2 = (e + x' \sin \psi)^2 (a^2 - x'^2 \cos^2 \psi)$,

d. i. eine Curve vierten Grades, welche symmetrich zur x'-Axe liegt Auch hierbei haben wir die 3 Fälle zu unterscheiden, $e \lessgtr a \operatorname{tg} \psi$. Diese Curve ist in allen Fällen geschlossen und besitzt, wenn $e < a \operatorname{tg} \psi$ ist, einen Doppelpunkt.

Schneiden wir schliesslich den elliptischen Cono-Cuneus (6) durch eine Ebene senkrecht auf der yz-Ebene, welche mit der y-Axe den Winkel ϑ bildet und von der z-Axe das Stück f abschneidet, so erhält man auf die oben ausgeführte Weise als Gleichung der betreffenden Durchschnittscurve:

(14). . . . $c^2 y'^2 \cos^2 \vartheta = (f + y' \sin \vartheta)^2 (a^2 - x'^2)$.

Diese Gleichung stellt im Allgemeinen eine Curve vierten Grades dar. Die verschiedenen Fälle, welche sich hieraus ergeben, je nachdem $\operatorname{tg} \vartheta \lessgtr \frac{c}{a}$ ist, entsprechen den ebenen Schnitten des Kegels. Für $f = o$ erhält man:

$$x' = \pm \sqrt{a^2 - c^2 \operatorname{ctg}^2 \vartheta}.$$

Die Ebenen, welche durch die singuläre Kante gehen, schneiden demnach aus dem elliptischen Cono-Cuneus (6) zwei Erzeugende desselben aus, wenn *val. abs.* $\operatorname{tg} \vartheta > \frac{c}{a}$ ist. Für $\operatorname{tg} \vartheta = \frac{c}{a}$ fallen die beiden Geraden in eine einzige zusammen.

Bevor wir nun zur Betrachtung der Tagentialebene an den elliptischen Cono-Cuneus übergehen, wollen wir einige Bemerkungen über die Tangentialebene der allgemeineren Fläche (4) nämlich $cy = z \cdot f(x)$ einfügen. Für dieselbe ergiebt sich:

(15). . . . $zf'(x)(\xi-x)-c(\eta-y)+f(x)(\zeta-z)=o$

oder:

(16). . . . $zf'(x).\xi-c\eta+f(x).\zeta-xzf'(x)=o.$

Ziehen wir die Durchschnittscurve dieser Ebene mit der Fläche (4) in Betracht, so erhält man für die Projection derselben auf die xz-Ebene:

(17). . . . $zf'(x)(\xi-x)-[f(\xi)-f(x)]\zeta=o.$

Angenommen, $f(x)$ genüge der Gleichung:

(18). . . . $f(x)\equiv A_0x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_m$,

worin $A_0, A_1, \ldots A_m$ Constante bedeuten, dann ist $f(\xi)-f(x)$ durch $\xi-x$ ohne Rest theilbar. Die Gleichung (17) zerfällt also in die beiden Gleichungen:

(19). . . . $\begin{cases} \xi-x=o \\ z.f'(x)-\dfrac{f(\xi)-f(x)}{\xi-x}\zeta=o. \end{cases}$

Daraus folgt, dass die Tangentialebene aus der Fläche $(m+1)^{\text{ten}}$ Grades im Allgemeinen die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende der Fläche und eine Curve m^{ten} Grades ausschneidet. Aendert sich z, während x constant bleibt, so ändert sich damit die Curve m^{ten} Grades, d. h. die Tangentialebene berührt die Fläche (4) im Allgemeinen nicht längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben.

Ausnahmen von diesem Satze finden für $f'(x)=o$ und $f'(x)=\infty$ statt; d. h. die Tangentialebene in denjenigen Punkten der Fläche (4), welche Punkten ihrer Leitlinie entsprechen, in denen die Tangente an die Leitlinie der xz-Ebene parallel ist oder auf der xz-Ebene senkrecht steht, berührt die Fläche längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben.

Hat die Leitlinie der Fläche (4) die Gleichung:

(20). . . . $y^n=f(x)\equiv A_0x^m+A_1x_{m-1}+\ldots+A_m$

so ergiebt sich für die Projection der Durchschnittscurve der Tangentialebene mit der Fläche auf die xz-Ebene:

$$(21). \ldots \begin{cases} \xi - x = o \\ n^n [f(x)]^{n-1} \dfrac{f(\xi) - f(x)}{\xi - x} - z^n [f'(x)]^n (\xi - x)^{n-1} \\ - \binom{n}{1} n z^{n-1} [f'(x)]^{n-1} f(x) (\xi - x)^{n-2} \zeta - \ldots \\ - \binom{n}{1} n^{n-1} z f'(x) [f(x)]^{n-1} \zeta^{n-1} = o. \end{cases}$$

Auch für diesen Fall gelten mithin die vorhin abgeleiteten Sätze.

Diese Resultate wollen wir auf den elliptischen Cono-Cuneus (6) anwenden, dessen Tangentialebene durch die Gleichung:

$$(22). \ldots xz^2 (\xi - x) + cy \,.\, c\eta - z (a^2 - x^2) \zeta = o$$

dargestellt wird. Die Berührungspunkte derjenigen Tangentialebenen, welche die Fläche längs der ganzen, durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden derselben berühren, gehören zu den Coordinaten $x = o$ und $x = \pm a$. Wie sich aus der Gleichung (22) ergiebt, ist die singuläre Kante des elliptischen Cono-Cuneus dadurch ausgezeichnet, dass es in den Punkten derselben je zwei Tangentialebenen an die Fläche giebt, welche sich in der x-Axe schneiden und mit der xz-Ebene entgegengesetzt gleiche Winkel bilden. Es sind dies die bei (14) für $f = o$ betrachteten Ebenen. Daraus folgt, dass jede durch die singuläre Kante gehende Ebene, welche mit der xz-Ebene einen Winkel bildet, dessen trigonometrische Tangente absolute gleich oder kleiner als $\frac{c}{a}$ ist, den elliptischen Cono-Cuneus (6) berührt.

Im Allgemeinen besteht die Durchschnittscurve der Tangentialebene mit dem elliptischen Cono-Cuneus aus der durch ihren Berührungspunkt gehenden Erzeugenden desselben und aus einer Curve dritten Grades.

Unsere nächste Aufgabe sei, das Volumen zu bestimmen, welches zwischen den Ebenen $x = o$, $x = x_o$, der xz-Ebene und dem zugehörigen Theile des elliptischen Cuno-Cuneus (6) liegt. Für dasselbe ergiebt sich:

$$V = \int_0^{x_0} \int_0^{z_0} y\,dx\,dz = \frac{1}{c} \int_0^{x_0} dx \sqrt{a^2 - x^2} \int_0^{z_0} z\,dz.$$

$$(23). \ldots V = \frac{z_0^2}{2c} \left\{ \frac{1}{2} x_0 \sqrt{a^2 - x_0^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right) \right\}$$

oder wenn man die zu x_0, z_0 zugehörige Coordinate y mit y_0 bezeichnet:

$$(24). \ldots V = \frac{1}{4} x_0 y_0 z_0 + \frac{1}{4} a^2 \frac{z_0^2}{c} \arcsin\left(\frac{x_0}{a}\right).$$

Setzt man hierin $x_0 = a$, so erhält man:

$$(25). \ldots V = \frac{\pi a^2 z_0^2}{8c},$$

d. i. aber der vierte Theil desjenigen Volumens V', welches von dem elliptischen Cono-Cuneus (6) und der Ebene $z = z_0$ begrenzt wird. Daraus folgt:

$$(26). \ldots V' = \frac{1}{2} \pi a^2 \frac{z_0^2}{c}.$$

Ziehen wir in Betracht, dass die zur xy-Ebene parallele Ebene $z = z_0$ aus dem elliptischen Cono-Cuneus (6) eine Ellipse mit den Halbaxen a und $\frac{a z_0}{c}$ ausschneidet, so lässt sich die Formel (26) so deuten: Das von dem elliptischen Cono-Cuneus (6) und der Ebene $z = z_0$ begrenzte Volumen ist gleich dem halben Volumen des Cylinders mit der durch die Ebene $z = z_0$ aus der Fläche ausgeschnittenen Ellipse als Grundfläche und der Höhe z_0.

Dieser Satz gilt in der allgemeinsten Form für die Fläche (4) Es ergiebt sich nämlich:

$$V = \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{z_0} y\,dx\,dz = \frac{1}{c} \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx \int_0^{z_0} z\,dz = \frac{z_0^2}{2c} \int_{x_1}^{x_2} f(x).dx.$$

Nun schneidet aber die Ebene $z = z_0$ aus der Fläche (4) die Curve: $cy = z_0 . f(x)$. Projiciren wir diese auf die

xy-Ebene, so ergiebt sich für das Volumen V' des Projections-cylinders zwischen den Ebenen $x = x_1$, $x = x_2$, $z = o$, $z = z_o$, $y = o$ und dem zugehörigen Theile der Cylinderfläche:

$$V' = z_o \int_{x_1}^{x_2} y\, dx = \frac{z_o^2}{c} \int_{x_1}^{x_2} f(x) \,.\, dx.$$

Aus beiden Resultaten folgt:

(27). . . . $V : V' = 1 : 2$

womit der obige Satz allgemein bewiesen ist.

Bemerkt sei noch, dass sich die Formel (26) auch mit Hilfe einer Mittenfigur deuten lässt. Die Ebene $z = \frac{1}{2} z_o$ schneidet nämlich aus dem elliptischen Cono-Cuneus (6) eine Ellipse mit den Halbaxen a und $\frac{a z_o}{2c}$ aus. Bezeichnet man diese Mittenfigur mit M, so geht die Gleichung (26) über in:

(28). . . . $V' = M \,.\, z_o$

Diese Formel gilt noch, wenn das Volumen zwischen den Ebenen $z = z_1$, $z = z_2$ und dem elliptischen Cono-Cuneus (6) betrachtet wird. Man hat dann nur für z_o den Abstand der beiden begrenzenden Ebenen zu setzen. Denn aus (26) folgt:

$$V = \frac{1}{2} \pi a^2 \frac{z_2^2 - z_1^2}{c} = \frac{1}{2} \pi a^2 h \frac{z_1 + z_2}{c}.$$

Nun ist aber: $z = \frac{c}{a} b$, wenn b die zu z zugehörige variable Halbaxe der ausgeschnittenen Ellipse ist. Mithin erhält man, wenn man $\frac{b_1 + b_2}{2} = b_3$ setzt:

$$V = \pi a b_3 h.$$

Ist z_3 das zu b_3 zugehörige z, so folgt:

$$z_3 = \frac{1}{2} (z_1 + z_2)$$

$$z_2 - z_3 = \frac{1}{2} (z_2 - z_1) = \frac{1}{2} h,$$

woraus sich der obige Satz ergiebt:

(29). . . . $V = M \cdot h.$

Wir hatten erhalten: $V = \pi a b_3 h = \pi a \frac{b_1 + b_2}{2} h.$ Diese Formel lässt sich noch anders deuten. Es ergiebt sich nämlich daraus:

$$V = \frac{1}{6} \pi a b_1 h + \frac{1}{6} \pi a b_2 h + \frac{1}{3} \pi a (b_1 + b_2) h$$

$$V = \frac{h}{3} \left\{ \frac{1}{2} (\pi a b_1 + \pi a b_2) + 2 \pi a b_3 \right\}$$

Setzt man $\pi a b_1 = G_1$; $\pi a b_2 = G_2$, $\pi a b_3 = M$, wobei G_1 und G_2 die begrenzenden Ellipsen, M die Mittenfigur bedeutet, so erhält man:

(30). . . . $V = \frac{h}{3} \left\{ \frac{1}{2} (G_1 + G_2) + 2 M \right\}$

d. i. die Simson'sche Regel, welche in der Stereometrie in Betreff des Prismatoids bewiesen wird.

Schliesslich wollen wir noch für alle Flächen, welche durch die Gleichung:

$$F \equiv c^2 y^2 - z^2 (a^2 - x^2) = o$$

dargestellt werden, wenn c variabel ist, die Orthogonalflächen betrachten. Angenommen, eine dieser Orthogonalflächen habe die Gleichung $\varphi = o$, dann sind die *cosinus* der Winkel, welche die Normale derselben mit den 3 Coordinatenaxen bildet, bezüglich proportional: $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Ferner sind die *cosinus* der Winkel, welche die Normale einer Fläche der gegebenen Flächenschaar mit den 3 Coordinatenaxen bildet, bezüglich proportional: $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$. Da diese Normalen nach der obigen Bedingung auf einander senkrecht stehen, so erhält man:

$$\frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z} = o$$

oder wenn man für $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ ihre Werthe einsetzt und

dann c^2 zwischen der erhaltenen Gleichung und der Gleichung der gegebenen Flächenschaar eliminirt:

$$(31). \ldots xyz\frac{\partial\varphi}{\partial x} + z(a^2-x^2)\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y(a^2-x^2)\frac{\partial\varphi}{\partial z} = o$$

d. i. die partielle Differentialgleichung der gesuchten Orthogonalflächen.

Nach der Lagrange'schen Reduction der linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung auf ein System gewöhnlicher Differentialgleichungen gelangt man zum allgemeinen Integral der Gleichung (31) durch Integration von

$$dx : dy : dz = xyz : z\ a^2-x^2) : -y\,(a^2-x^2).$$

Daraus folgt:

$$dx : dy = xy : a^2-x^2$$
$$x^2+y^2-2a^2 lg\, x = c_1$$
$$dy : dz = z : -y$$
$$y^2+z^2 = c_2.$$

Die Orthogonalflächen der gegebenen Flächenschaar sind demnach enthalten in der Gleichung:

$$(32). \ldots F(x^2+y^2-2a^2\, lg\, x, y^2+z^2) = o.$$

II.

Der getheilte hyberbolische Cono-Cuneus.

Wir kommen jetzt zur Betrachtung des getheilten hyperbolischen Cono-Cuneus. Die Leithyperbel habe hierbei die Gleichungen:

$$(33). \ldots \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2} = 1;\ z = c.$$

Demnach erhält man als Gleichung des getheilten hyperbolischen Cono-Cuneus, wenn wir, wie oben, c^2 für $\frac{a^2c^2}{b^2}$ setzen:

$$(34). \ldots c^2y^2 = z^2(x^2-a^2).$$

Da die Gleichung nur die Quadrate von x, y, z enthält, so ist zunächst klar, dass diese Fläche symmetrisch zu den

3 Coodinatenebenen liegt. Ferner folgt ohne Weiteres, dass es nur reelle Werthe von y und z giebt, wenn *val. abs.* $x \geq a$ ist. Die vorgelegte Fläche besteht demnach aus zwei getrennten Theilen zu beiden Seiten der yz-Ebene, woher die Bezeichnung „getheilt" entnommen ist.

Wir wollen hier nicht näher auf ebene Schnitte dieses hyperbolischen Cono-Cuneus eingehen, weil wir dabei auf ganz ähnliche Betrachtungen wie beim elliptischen Cono-Cuneus geführt werden. Bemerkt sei nur, dass die Ebene $z = h$ aus der Fläche (34) die Hyperbel:

$$(35). \ldots \frac{x^2}{a^2} - \frac{c^2 y^2}{a^2 h^2} = 1$$

ausschneidet. Die Mittelpunkte aller dieser ausgeschnittenen Hyperbeln liegen auf der z-Axe, ihre reellen Axen in der xz-Ebene, ihre imaginären in der yz-Ebene. Die reellen Axen sind einander gleich $2a$, die imaginären dagegen wachsen proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der xy-Ebene. Für $h = c$ ergiebt sich eine gleichseitige Hyperbel mit dem Parameter a.

Ziehen wir die Brennpunkte dieser ausgeschnittenen Hyperbeln in Betracht, so ergiebt sich als Gleichung des geometrischen Ortes derselben:

$$(36). \ldots \frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

d. h. in Worten: Der geometrische Ort der Brennpunkte aller Hyperbeln, welche aus dem hyperbolischen Cono-Cuneus (34) durch Ebenen parallel der xy-Ebene ausgeschnitten werden, ist eine Hyperbel in der xz-Ebene mit den Halbaxen a und c, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfang ist, deren reelle Axe $2a$ in der x-Axe, deren imaginäre Axe $2c$ in der z-Axe liegt.

Die Hyperbel (35) besitzt zwei Asymptoten, welche der Gleichung genügen: $y = \pm \frac{h}{c} x$. Die Asymptoten aller solcher ausgeschnittenen Hyperbeln liegen demnach auf der Fläche:

$$cy = \pm xz.$$

Diese Gleichung zerfällt in die beiden Gleichungen:

$$(37). \ldots \begin{matrix} cy - xz = o \\ cy + xz = o. \end{matrix}$$

Dieselben stellen zwei hyperbolische Paraboloide dar.

Was die Tangentialebene des getheilten hyperbolischen Cono-Cuneus betrifft, so ergeben sich für dieselbe ganz ähnliche Beziehungen wie für die des elliptischen Cono-Cuneus, so dass wir sie hier nicht erst abzuleiten brauchen.

Betrachten wir jetzt in der Gleichung:

$$(38). \ldots F \equiv c^2 y^2 - z^2 (x^2 - a^2) = o$$

c als variabel, so stellt dieselbe eine Schaar von getheilten hyperbolischen Cono-Cuneis dar. Alle Flächen dieser Schaar gehen durch die x-Axe und berühren sich in den beiden Geraden $x = \pm a, y = o$. Sie besitzen also keine eigentliche einhüllende Fläche.

Anders verhält es sich, wenn wir in der Gleichung (38) c als constant, a dagegen als variabel annehmen. Diesen Fall wollen wir zunächst allgemein für die Fläche (4) betrachten, wenn die Gleichung derselben:

$$(39). \ldots F \equiv cy - z\,\varphi(x, \alpha) = o$$

ist, worin α einen variablen Parameter bedeutet. Für die einhüllende Fläche dieser Flächenschaar ergeben sich die Bedingungsgleichungen:

$$F = o$$

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha} = -z \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = o; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} = o.$$

Daraus geht hervor, dass die einhüllende Fläche der vorgelegten Flächenschaar eine geradlinige Fläche derselben Art ist, dass aber nur dann eine wirkliche einhüllende Fläche dieser Schaar existirt, wenn die Leitlinie einer Fläche dieser Schaar eine Enveloppe besitzt. Diese Enveloppe ist die Leitlinie der einhüllenden Fläche der vorgelegten Flächenschaar.

Dieses Resultat auf die Flächenschaar (38) angewandt liefert als Gleichung der einhüllenden Fläche derselben:

$$cy + xz = o$$
$$cy - xz = o.$$

Das sind aber die Gleichungen (37) Die einhüllende Fläche der vorgelegten Flächenschaar besteht demnach aus den beiden hyperbolischen Paraboloiden, auf denen die Asymptoten aller Hyperbeln liegen, welche durch Ebenen parallel der xy-Ebene aus der Fläche (34) ausgeschnitten werden.

Für die erstere Schaar von geradlinigen Flächen, welche durch die Gleichung (39) dargestellt wird, wollen wir noch die Orthogonalflächen bestimmen. Ist $\varphi = o$ die Gleichung einer solchen Orthogonalfläche, so erhält man nach den beim elliptischen Cono-Cuneus angestellten Erörterungen die Bedingungsgleichung:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z}\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial z} = o.$$

Daraus folgt die partielle Differentialgleichung der gesuchten Orthogonalflächen:

$$xyz\frac{\partial \varphi}{\partial x} - z(x^2 - a^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y} + y(x^2 - a^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = o$$

oder:

$$xyz\frac{\partial \varphi}{\partial x} + z(a^2 - x^2)\frac{\partial \varphi}{\partial y} - y(a^2 - x^2)\frac{\partial \varphi}{\partial z} = o.$$

Es ist dies die Gleichung (31). Daraus resultirt der Satz: Ist c variabel, hat dagegen a einen bestimmten Werth, so schneiden die Orthogonalflächen der durch die Gleichung (34) dargestellten Schaar von getheilten hyperbolischen Cono-Cuneis die durch die Gleichung (6) dargestellte Schaar von elliptischen Cono-Cuneis rechtwinklig.

Unsere nächste Aufgabe sei die Cubatur des getheilten hyperbolischen Cono-Cuneus (34). Es ergiebt sich:

$$V = \int_a^{x_0}\int_0^{z_0} y\,dx\,dz = \frac{1}{c}\int_a^{x_0} dx\sqrt{x^2 - a^2}\int_0^{z_0} z\,dz.$$

$$(40)\ldots V = \frac{z_0^2}{2c}\left\{\frac{1}{2}x_0\sqrt{x_0^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2 lg\left(\frac{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}{a}\right)\right\}.$$

Beachten wir, dass: $c^2 y_0^2 = z_0^2 (x_0^2 - a^2)$ ist, so geht die Gleichung (40) über in:

$$(41)\ldots\ldots V = \frac{1}{4}x_0 y_0 z_0 - \frac{1}{4}a^2 \frac{z_0^2}{c} lg\left(\frac{x_0+\sqrt{x_0^2-a^2}}{a}\right).$$

Von diesem Volumen gelten analoge Sätze wie von demjenigen des elliptischen Cono-Cuneus.

III.
Der einfache hyperbolische Cono-Cuneus.

Nehmen wir hierbei als Leitlinie dieselbe Hyperbel wie beim getheilten hyperbolischen Cono-Cuneus:

$$(42)\ldots\ldots \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1;\ z = c$$

und als singuläre Kante demnach die y-Axe, als Directorebene die xz-Ebene, so müssen die erzeugenden Geraden des einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus den Gleichungen genügen:

$$(43)\ldots\ldots x = uz;\ y = v.$$

Als Gleichung des einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus ergiebt sich demnach:

$$(44)\ldots\ldots \frac{c^2 x^2}{a^2 z^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Aus dieser Gleichung geht hervor, dass x jeden beliebigen Werth annehmen kann. Ferner folgt daraus, dass jede zur xy-Ebene parallele Ebene den einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus (44) in einer Hyperbel schneidet, deren Mittelpunkt auf der z-Axe liegt und deren Axen bezüglich in die Ebenen der xz und der yz fallen. Darin stimmt er mit dem getheilten hyperbolischen Cono-Cuneus überein. Während aber bei jenem alle ausgeschnittenen Hyperbeln dieselbe reelle Axe haben, wächst hier die reelle Axe der ausgeschnittenen

Hyperbeln proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der xy-Ebene. Die reellen Axen verhalten sich also beim einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus genau so wie die imaginären Axen beim getheilten, und umgekehrt sind die imaginären Axen der Hyberbeln des einfachen einander gleich wie die reellen Axen derjenigen des getheilten hyperbolischen Cono-Cuneus.

Hieraus folgt, dass beim einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus die Scheitel der ausgeschnittenen Hyperbeln von $z = \infty$ bis $z = o$ sich einander nähern, bis sie für $z = o$ zusammenfallen. Die beiden Theile dieses Cono-Cuneus liegen demnach nicht vollständig von einander getrennt, sondern treffen in der y-Axe zusammen.

Beide hyperbolische Cono-Cunei unterscheiden sich in Betreff der ausgeschnittenen Hyperbeln noch darin, dass beim getheilten die Zweige der Hyperbeln sich von der reellen Axe mit wachsendem Abstande der schneidenden Ebene von der xy-Ebene entfernen, während sie umgekehrt beim einfachen sich mit wachsendem Abstande der schneidenden Ebene von der xy-Ebene ihrer reellen Axe nähern.

Der einfache hyperbolische Cono-Cuneus hat ferner das mit dem getheilten gemein, dass die Brennpunkte der aus ihm ausgeschnittenen Hyperbeln auf einer Hyperbel liegen, deren Gleichung, wie sich aus (44) ergiebt, ist:

$$(45). \ldots \frac{x^2}{a^2} - \frac{a^2 z^2}{b^2 c^2} = 1.$$

Aus der Vergleichung von (36) und (45) resultirt der Satz: Schneiden sich die beiden hyperbolischen Cono-Cunei in einer gleichseitigen Hyperbel, so liegen die Brennpunkte der durch Ebenen parallel dieser Durchschnittshyperbel aus ihnen ausgeschnittenen Hyberbeln auf einer und derselben Hyperbel.

Die Asymptoten der durch Ebenen parallel der xy-Ebene aus der Fläche (44) ausgeschnittenen Hyperbeln genügen der Gleichung:

$$y = \pm \frac{bc}{az} x.$$

Sie liegen demnach auf den beiden hyperbolischen Paraboloiden:

$$(46). \ldots \begin{matrix} ayz - bcx = o \\ ayz + bcx = o. \end{matrix}$$

Dreht man den einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus (44) um die z-Axe um $\frac{\pi}{2}$ so hat man nur y mit x zu vertauschen; alles Uebrige bleibt ungeändert. Führen wir diese Vertauschung in den Gleichungen (46) aus, so gehen dieselben über in:

$$(47). \ldots \begin{matrix} axz - bcy = o \\ axz + bcy = o. \end{matrix}$$

Berücksichtigt man nun die Gleichungen (37), so resultirt: Schneiden sich die beiden hyperbolischen Cono-Cunei in einer gleichseitigen Hyperbel und dreht man den einen um die z-Axe um $\frac{\pi}{2}$, so liegen die Asymptoten der aus beiden Flächen durch Ebenen parallel der xy-Ebene ausgeschnittenen Hyperbeln auf denselben beiden hyperbolischen Paraboloiden.

Ferner ergiebt sich als Gleichung der Tangentialebene im Punkte xyz des einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus (44):

$$(48). \ldots \frac{c^2 x \xi}{a^2 z^2} - \frac{y(\eta - y)}{b^2} - \frac{c^2 x^2 \zeta}{a^2 z^3} = o.$$

Von derselben gelten analoge Beziehungen wie von derjenigen des getheilten hyperbolischen Cono-Cuneus. Die Berührungspunkte derjenigen Tangentialebenen, welche die vorgelegte Fläche (44) längs einer ganzen Erzeugenden berühren, liegen auf den Durschschnittslinien der xz-Ebene mit der Fläche.

Betrachten wir jetzt das Volumen V zwischen den Ebenen $y = o$, $y = y_o$, $z = z_o$, $x = o$ und dem zugehörigen Theil der vorgelegten Fläche (44), so erhält man:

$$(49). \ldots V = \frac{a z_o^2}{2bc} \left\{ \frac{1}{2} y_o \sqrt{y_o^2 + b^2} + \frac{1}{2} b^2 lg \left(\frac{y_o + \sqrt{y_o^2 + b^2}}{b} \right) \right.$$

Diese Gleichung lässt sich mit Berücksichtigung von (44) auch so schreiben:

$$(50). \ldots V = \frac{1}{4} x_o y_o z_o + \frac{ab z_o^2}{4c} lg \left(\frac{a y_o z_o + bc x_o}{ab z_o} \right).$$

Ferner folgt aus der Gleichung (41) mit Hinzunahme der Gleichung (34):

$$(51). \ldots V' = \frac{1}{4} x_0 y_0 z_0 - \frac{1}{4} \frac{a^2 z_0^2}{c} lg \left(\frac{x_0 z_0 + c y_0}{a z_0} \right).$$

Vertauscht man in einer der Gleichungen (50) oder (51) x mit y und setzt in (50) $a = b$, so resultirt:

$$(52). \ldots V + V' = \frac{1}{2} x_0 y_0 z_0.$$

Daraus fliesst der Satz: Schneiden sich die beiden hyperbolischen Cono-Cunei in einer gleichseitigen Hyperbel und dreht man den einen um die z-Axe um $\frac{\pi}{2}$ so ist die Summe der zu denselben Coordinaten x_0, y_0, z_0 gehörenden Volumina der beiden Flächen gleich dem halben Volumen eines rechtwinkligen Parallelepipedons mit den Kanten x_0, y_0, z_0.

IV.

Die Meridiancurven der Cono-Cunei.

Wir schliessen hier eine kurze Behandlung einer Art von Curven auf den Cono-Cuneis an. Auf den Rotationsflächen unterscheidet man Meridiane und Curven gleicher Polhöhe. Diese Terminologie hat Alfred Enneper allgemein auf krumme Oberflächen übertragen und diese Curven folgendermassen definirt[1]). Im Punkte xyz einer Fläche bilde die Normale den Winkel u mit der z-Axe, durch v werde der Winkel bezeichnet, welchen die Projection der Normale auf die xy-Ebene mit der Axe der x einschliesst. Einem bestimmten Werthe von u entspricht auf der Fläche eine bestimmte Curve, für welche v allein variabel ist. Dieselbe heisst auf den Rotationsflächen eine Curve gleicher

1) cf. Alfred Enneper: „Ueber Flächen mit besonderen Meridiancurven“ im XXIX. Bde. der Abhandlungen der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen.

Polhöhe. Variirt u allein, hat also v einen bestimmten Werth, so entspricht demselben eine Curve auf der Fläche, welche bei den Rotationsflächen den Namen Meridian führt.

Wir wollen in Folgendem die Meridiancurven der Cono-Cunei betrachten. Wird z als Funktion von x und y angesehen, dann besteht die Gleichung:

$$\frac{\frac{\partial z}{\partial y}}{\frac{\partial z}{\partial x}} = tg\, v.$$

Mittelst der Gleichung (6) des elliptischen Cono-Cuneus ergiebt sich:

$$tg\, v = \frac{a^2 - x^2}{xy}$$

$$(53). \ldots a^2 - x^2 - xy\, tg\, v = o.$$

Diese Gleichung lässt erkennen, dass die Projection der Meridiancurve des elliptischen Cono-Cuneus (6) auf die xy-Ebene eine Hyperbel mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt ist, deren eine Axe mit der Axe der x den Winkel $\frac{1}{2} v$ bildet und deren Axen bezüglich gleich:

$$\frac{a}{\cos \frac{1}{2} v} \sqrt{\cos v} \text{ und } \frac{a}{\sin \frac{1}{2} v} \sqrt{\cos v} \text{ sind.}$$

Zu demselben Resultate gelangt man beim getheilten hyperbolischen Cono-Cuneus (34). Man erhält nämlich:

$$tg\, v = -\frac{x^2 - a^2}{xy}$$

Daraus fliesst der Satz: Die Meridiancurven des elliptischen Cono-Cuneus (6) und diejenigen des hyperbolischen Cono-Cuneus (34) liegen auf denselben hyperbolischen Cylinderflächen.

Diese Meridiancurven sind Curven doppelter Krümmung. Denn wäre dies nicht der Fall, so müsste, wie in der Theorie

der Curven nachgewiesen wird, wenn man x als unabhängige Veränderliche annimmt:

$$\begin{vmatrix} \frac{d^2 y}{dx^2} & \frac{d^3 y}{dx^3} \\ \frac{d^2 z}{dx^2} & \frac{d^3 z}{dx^3} \end{vmatrix} = 0$$

sein. Man erhält aber für die Meridiancurven des elliptischen Cono-Cuneus (6). als Werth dieser Determinante:

$$\frac{6\,a^4\,c}{x^3\,(a^2 - x^2)^{5/2}\,tg^2\,v}$$

und für diejenigen des hyperbolischen Cono-Cuneus (34):

$$\frac{6\,a^4\,c}{x^3\,(x^2 - a^2)^{5/2}\,tg^2 v}.$$

Setzt man den Werth von $a^2 - x^2$ aus der Gleichung (53) in (6) ein, so ergiebt sich:

(54). . . . $c^2\,y = x z^2\,tg\,v.$

Die Meridiancurven des elliptischen Cono-Cuneus (6) liegen demnach auch auf Flächen, welche durch die Gleichung (54) dargestellt werden. Es sind dies windschiefe Flächen, welche durch Bewegung einer Geraden parallel der xy-Ebene entstanden gedacht werden können, welche längs der Parabel $z^2 = cy\,ctg\,v$; $x = c$ hingleitet, während sie stets durch die z-Axe geht.

Ein ähnliches Resultat ergiebt sich für den getheilten hyperbolischen Cono-Cuneus (34), dessen Meridiancurven auf den Flächen:

$$c^2 y = -\,x z^2\,tg\,v$$

(55). . . . $c^2 y = x z^2\,tg\,(\pi - v)$

liegen. Daraus geht hervor, dass die parabolischen windschiefen Flächen der eben beschriebenen Art sowohl den elliptischen Cono-Cuneus (6) als auch den getheilten hyperbolischen Cono-Cuneus (34) in Meridiancurven schneiden.

Ferner ergiebt sich für den einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus (44):

$$tg\,v = -\frac{y^2 + b^2}{xy}.$$

(56). . . . $y^2\ tg\ v + xy + b^2\ tg\ v = o$

Die Meridiancurven des einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus (44) liegen mithin ebenso wie diejenigen des elliptischen und des getheilten hyperbolischen Cono-Cuneus auf hyperbolischen Cylinderflächen, deren Axe die z-Axe ist. Die Spuren dieser Cylinderflächen in der xy-Ebene sind Hyperbeln mit dem Coordinatenanfang als Mittelpunkt, deren eine Axe mit der Axe der x den Winkel $\frac{1}{2}\ v$ bildet und deren Axen bezüglich: $b\sqrt{\frac{2\ sin\ v}{1+sin\ v}}$ und $b\sqrt{\frac{2\ sin\ v}{1-sin\ v}}$ sind.

Durch Substitution des Werthes von $y^2 + b^2$ aus (56) in (44) erhält man:

$$b^2\ c^2\ x\ tg\ v = -\ a^2\ y\ z^2$$

(57). . . . $b^2\ c^2\ x = a^2\ y\ z^2\ tg\ (\frac{\pi}{2} + v).$

Durch Vertauschung von x mit y geht diese Gleichung über in:

(58). . . . $b^2\ c^2\ y = a^2\ x\ z^2\ tg\ (\frac{\pi}{2} + v).$

Vergleichen wir die Resultate (54), (55) und (58), so resultirt der Satz:

Die Meridiancurven des elliptischen, des getheilten und des einfachen hyperbolischen Cono-Cuneus, welche die singuläre Kante und die Directorebene gemeinsam haben, und welche so beschaffen sind, dass eine und dieselbe Ebene aus dem elliptischen einen Kreis, aus den beiden hyperbolischen je eine gleichseitige Hyperbel mit einem Parameter gleich dem Radius des Kreises des elliptischen Cono-Cuneus ausschneidet, liegen auf denselben parabolischen windschiefen Flächen.

Ziehen wir schliesslich allgemein die durch die Gleichung (4) dargestellten Flächen in Betracht so ergiebt sich für dieselben:

(59) . . . $y\ f'(x)\ .\ tg\ v + f(x) = o.$

Die Projectionen der Meridiancurven der Fläche (4) auf die xy-Ebene sind also im Allgemeinen Curven m<u>ten</u> Grades, wenn m den Grad von $f(x)$ bedeutet.

Dieser Satz gilt auch, wenn die Leitlinie der Fläche der Gleichung: $y^n = f(x)$ genügt, so dass der Grad der auf die xy-Ebene projicirten Meridiancurven der Fläche (4) von n unabhängig ist.

Denn es ergiebt sich für diesen Fall:

(60). . . . $y f'(x) . tg\, v + n . f(x) = o.$

V.

Verallgemeinerungen der Cono-Cunei.

Zum Schluss wollen wir an bisher gefundene Resultate einige Bemerkungen anknüpfen, indem wir die betrachteten Flächen etwas verallgemeinern.

Wir ändern zunächst die Bedingung, dass die singuläre Kante einer Axe des Leitkegelschnitts parallel ist, dahin ab, dass eine Axe des Leitkegelschnitts mit der singulären Kante den Winkel α bildet, während diese Kante der Ebene des Leitkegelschnitts parallel ist und durch die im Mittelpunkte desselben auf seiner Ebene senkrecht stehende Gerade geht.

Sind die Gleichungen des Leitkegelschnitts:

(61). . . . $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D;\ z = c.$

dann ergiebt sich als Gleichung der gesuchten Fläche, wenn die Ebene der yz die Directorebene ist:

(62). . . . $Ax^2 z^2 + 2Bcxyz + Cc^2 y^2 = Dz^2.$

Daraus folgt, dass jede zur xy-Ebene parallele Ebene die Fläche (62) in einen Kegelschnitt schneidet, u. z. da das charakteristische Binom desselben gleich $(B^2 - A . C)\, c^2 z^2$ ist, in einer Ellipse oder Hyperbel, je nachdem der Leitkegelschnitt eine Ellipse oder Hyperbel ist.

Um diesen Kegelschnitt näher zu untersuchen, betrachten wir die allgemeine Mittelpunktsgleichung eines solchen:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = D.$$

Wenden wir hierauf die Coordinatentransformation an:

$$x = x' \cos\alpha + y' \sin\alpha$$
$$y = -x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,$$

so geht diese Gleichung über in:

$$A' x'^2 + 2B' x' y' + C' y'^2 = D$$

wobei: $A' = A\cos^2\alpha - 2B \sin\alpha \cos\alpha + C \sin^2\alpha$

$$B' = \frac{1}{2} A \sin 2\alpha + B \cos 2\alpha - \frac{1}{2} C \sin 2\alpha$$

$$C' = A \sin^2\alpha + 2B \sin\alpha \cos\alpha + C\cos^2\alpha$$

$B' = o$ liefert die Bedingung: $tg\, 2\alpha = \frac{2B}{C-A}$. Dadurch ergiebt sich:

$$A' = \frac{1}{2}(A+C) + \frac{(A-C)^2 - 4B^2}{2\sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}$$

$$C' = \frac{1}{2}(A+C) - \frac{(C-A)^2 - 4B^2}{2\sqrt{(C-A)^2 + 4B^2}}.$$

Diese Resultate auf die Gleichung (62) angewandt, liefert:

$$(63)\ldots \begin{cases} tg\, 2\alpha = \dfrac{2Bcz}{Cc^2 - Az^2} \\ A' = \dfrac{1}{2}(Az^2 + Cc^2) + \dfrac{(Az^2 - Cc^2)^2 - 4B^2c^2z^2}{2\sqrt{(Cc^2 - Az^2)^2 + 4B^2c^2z^2}} \\ C' = \dfrac{1}{2}(Az^2 + Cc^2) - \dfrac{(Az^2 - Cc^2)^2 - 4B^2c^2z^2}{2\sqrt{(Cc^2 - Az^2)^2 + 4B^2c^2z^2}}. \end{cases}$$

Daraus geht hervor, dass die Fläche (62) dadurch entstanden gedacht werden kann, dass sich eine Ellipse oder Hyperbel mit variablen Axen parallel mit sich selbst bewegt, während ihr Mitttelpunkt eine auf der Ebene des Kegelschnitts senkrechte Gerade beschreibt und ihre Axen sich um den Mittelpunkt drehen. Diese Art von Flächen unterscheidet sich von den Cono-Cuneis dadurch, dass hier beide Axen des beweglichen Kegelschnitts variabel sind, während bei jenen nur eine Axe sich ändert. Sie haben das mit ihnen gemein, dass auch hierbei unter den ausgeschnittenen Ellipsen ein Kreis vorkommt, u. z. erhält man denselben für:

$$(Az^2 - Cc^2)^2 - 4B^2c^2z^2 = o$$

$$(64). \ldots z = \pm \frac{c}{A}(B + \sqrt{B^2 + A.C}).$$

Wenn der Leitkegelschnitt hierbei eine Parabel ist, so ist, weil der Mittelpunkt derselben im Unendlichen liegt, die singuläre Kante der Parabelaxe parallel, ihre Projection auf die Parabelebene braucht aber nicht mit der Parabelaxe zusammen zu fallen, sondern kann von ihr um irgend eine Strecke δ entfernt sein.

Um diesen Fall zu untersuchen, nehmen wir als Gleichungen der Leitparabel:

$$(y - \delta)^2 = 2px; \ z = c,$$

wodurch wir als Gleichungen der betreffenden Fläche erhalten:

$$(y - \frac{\delta}{c}z)^2 = 2p\frac{z^2}{c^2}x.$$

Diese Gleichung lässt erkennen, dass jede zur xy-Ebene parallele Ebene die betreffende Fläche in einer Parabel schneidet, deren Parameter proportional dem Quadrate der Entfernung der schneidenden Ebene von der singulären Kante wächst. Die Axen dieser ausgeschnittenen Parabeln sind der singulären Kante parallel und entfernen sich von der xz-Ebene proportional dem Abstande der schneidenden Ebene von der xy-Ebene.

Eine andere Verallgemeinerung ist die, dass die Ebene des Leitkegelschnitts nicht der singulären Kante parallel ist, sondern mit ihr den Winkel α bildet. Wir wollen hierbei zunächst den speciellen Fall untersuchen, wo:

$$(65). \ldots x^2 + y^2 = r^2; \ z = (a + x)\,tg\,\alpha.$$

die Gleichungen der Leitlinie sind. Die Gleichung der betreffenden Fläche ist demnach:

$$(66). \ldots y^2(a + x)^2\,tg^2\,\alpha = (r^2 - x)\,z^2.$$

Betrachten wir die Durchschnittscurve dieser Fläche vierten Grades mit einer Ebene senkrecht auf der xz-Ebene, welche mit der x-Axe den Winkel ψ bildet und von derselben das Stück c abschneidet, so ergiebt sich, wenn man die Coordinatentransformation anwendet:

$$(67). \ldots \begin{cases} x = x' \cos\psi - z' \sin\psi \\ y = y' \\ z = c\,tg\,\psi + x' \sin\psi + z' \cos\psi. \end{cases}$$

und $z' = o$ setzt, als Gleichung der definirten Durchschnittscurve:

$$y'^2 (a + x' \cos\psi)^2 tg^2\alpha = (r^2 - x'^2 \cos^2\psi)(c + x' \cos\psi)^2 tg^2\psi.$$

Für $c = a$ geht diese Gleichung über in:

$$(68). \ldots \begin{cases} a + x' \cos\psi = o \\ y'^2 tg^2\alpha = (r^2 - x'^2 \cos^2\psi) tg^2\psi. \end{cases}$$

Daraus folgt: Alle Ebenen senkrecht auf der xz-Ebene, welche durch die in der xy-Ebene liegende Gerade $x = -a$ gehen, schneiden die Fläche (66) in Ellipsen, deren Mittelpunkte auf der z-Axe liegen und deren Axen bezüglich in die Ebenen der xz und der yz fallen. Zugleich ist ersichtlich: Wenn $a > r$ ist, so besteht die betrachtete Durschschnittscurve nur aus der beschriebenen Ellipse; ist dagegen $a \leqq r$, so erhält man ausser dieser Ellipse noch eine Gerade.

Unter den ausgeschnittenen Ellipsen findet sich ein Kreis, u. z. für $\sin\psi = tg\,\alpha$. Ein Kreis kann demnach nur aus der Fläche (66) ausgeschnitten werden, wenn $\alpha \leqq \frac{\pi}{4}$ ist.

Hätten wir als Gleichung des Leitkegelschnitts allgemein angenommen:

$$(69). \ldots \begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = o \\ z = (a + x)\,tg\,\alpha \end{cases}$$

so hätten wir als Gleichung der Fläche erhalten:

$$(70). \ldots \begin{cases} z^2 \cdot \varphi_1 + z(a + x) \cdot \varphi_2 + (a + x)^2 \cdot \varphi_3 = o \\ \varphi_1 = Ax^2 + 2Dx + F \\ \varphi_2 = 2(Bx + E)\,y\,tg\,\alpha \\ \varphi_3 = Cy^2\,tg^2\,\alpha. \end{cases}$$

Für die Durchschnittscurve der oben definirten Ebene mit dieser Fläche ergiebt sich für $c = a$:

$$(71). \ldots \begin{cases} a + x' \cos\psi = o \\ \varphi'_1 \cdot tg^2\psi + \varphi'_2 \cdot tg\,\psi + \varphi'_3 = o. \end{cases}$$

Der ausgeschnittene Kegelschnitt ist also eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem

$$(B^2 - A \,.\, C)\, tg^2\, \alpha \,.\, sin^2\, \psi \gtreqless o$$

ist, d. h. je nachdem die Leitlinie eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist. Das charakteristische Binom verschwindet allerdings auch für $\psi = o$. In diesem Falle ergiebt sich aber die singuläre Kante als Durchschnittscurve.

Man kann demnach die betrachteten Flächen so entstanden denken, dass sich ein variabler Kegelschnitt um eine in seiner Ebene liegende Gerade dreht, während die Punkte seiner Peripherie gerade Linien beschreiben, welche einer durch die Drehungaxe gehenden Ebene parallel sind und durch eine auf dieser Directorebene senkrecht stehende Gerade gehen, welche die Drehungsaxe schneidet.

Die Cono-Cunei gehen dadurch hieraus hervor, dass die Drehungsaxe ins Unendliche rückt.

Aus der Gleichung (66) ergeben sich folgende zwei specielle Fälle.

Für $a = o$ geht dieselbe über in:

(72). . . . $x^2\, y^2\, tg^2\, \alpha = (r^2 - x^2)\, z^2$.

Für $a = r$ ergiebt sich aus (66):

(73). . . . $y^2\, (r + x)\, tg^2\, \alpha = (r - x)\, z^2$.

Diese letztere Gleichung stellt eine Fläche dritten Grades dar, welche die Eigenschaft hat, wie sich leicht nachweisen lässt, dass die Tangentialebene aus ihr im Allgemeinen die durch ihren Berührungspunkt gehende Erzeugende der Fläche und eine Ellipse ausschneidet.

Schliesslich wollen wir noch eine dritte Voraussetzung, welche wir bei der Definition der Cono-Cunei gemacht haben, fallen lassen. Wir haben dort nämlich angenommen, dass die singuläre Kante auf der Directorebene senkrecht steht, oder, was dasselbe bedeutet, dass die erzeugenden Geraden die singuläre Kante rechtwinklig schneiden. Betrachten wir nun den allgemeineren Fall, dass die Projectionen der

Erzeugenden auf die xz-Ebene mit der singulären Kante den Winkel β bilden.

Diese Erzeugenden müssen demnach den Gleichungen genügen, wenn wir die singuläre Kante wieder zur x-Axe nehmen:

$$(74). \ldots y = uz; \; x = v + z \operatorname{ctg} \beta.$$

Hat der Leitkegelschnitt allgemein die Gleichungen:

$$(75). \ldots \begin{cases} Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = o \\ z = (a + x) \operatorname{tg} \alpha \end{cases}$$

so erhält man als Gleichung der betreffenden Fläche, wenn man:

$$1 - \operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{ctg} \beta = m; \; \operatorname{tg} \alpha \,.\, \operatorname{ctg} \beta = n$$

setzt:

$$(76). \begin{cases} z^2 \,.\, \varphi_1 + z\,(a + x) \,.\, \varphi_2 + (a + x)^2 \,.\, \varphi_3 = o \\ \varphi_1 = A\,[na + x - z \operatorname{ctg} \beta]^2 - 2Bny\,[(1 + n)a + 2x - z \operatorname{ctg} \beta] \\ \quad + Cn^2y^2 + 2Dm\,(na + x - z \operatorname{ctg} \beta) - 2Em \,.\, ny + F \,.\, m^2 \\ \varphi_2 = 2\,[B\,(na + x) - Cny + Em]\, y \operatorname{tg} \alpha \\ \varphi_3 = Cy^2 \operatorname{tg}^2 \alpha. \end{cases}$$

Wir wollen nun nachweisen, dass auch diese Flächen durch Drehung eines veränderlichen Kegelschnitts entstehen können. Zu dem Zwecke betrachten wir die Durchschnittscurve der Fläche (76) mit einer auf der xz-Ebene senkrecht stehenden Ebene, welche mit der x-Axe den Winkel ψ bildet und von derselben das Stück c abschneidet. Mit Hülfe der Transformationsgleichungen (67) ergiebt sich als Gleichung der definirten Durchschnittscurve:

$$(77). \ldots \begin{cases} (c + x' \cos \psi)^2 \,.\, \varphi'_1 \,.\, \operatorname{tg}^2 \psi \\ + (c + x' \cos \psi)\,(a + x' \cos \psi)\, \varphi'_2 \,.\, \operatorname{tg} \psi \\ + (a + x' \cos \psi)^2 \,.\, \varphi'_3 = o. \end{cases}$$

Wird $c = a$, so geht diese Gleichung über in:

$$(78). \ldots \begin{cases} a + x' \cos \psi = o \\ \varphi'_1 \,.\, \operatorname{tg}^2 \psi + \varphi'_2 \,.\, \operatorname{tg} \psi + \varphi'_3 = o. \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (76) geht hervor, dass φ'_1, φ'_2, φ'_3 Funktionen zweiten Grades in x', y' sind. Mithin resultirt der Satz: Diejenigen auf der xz-Ebene senkrechten Ebenen,

welche durch die in der xy-Ebene gelegene Gerade $x = -a$ gehen, schneiden aus der Fläche (76) im Allgemeinen Kegelschnitte aus.

Das charakteristische Binom der Gleichung der Kegelschnitte ist:

$$(B^2 - A \,.\, C)\,(ctg\,\psi - ctg\,\beta)^4\,sin^2\,\psi \,.\, tg^4\,\psi\;\; tg^2\,\alpha.$$

Das Vorzeichen desselben hängt mithin von dem Vorzeichen von $B^2 - A \,.\, C$ ab, d. h. der ausgeschnittene Kegelschnitt ist eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel, je nachdem der Leitkegelschnitt der Fläche (76) eine Ellipse, Parabel oder Hyperbel ist.

Allerdings verschwindet das charakteristische Binom auch für $\psi = o$ und für $\psi = \beta$. Im ersteren Falle erhält man aber als Durchschnittscurve die singuläre Kante, im zweiten eine erzeugende Gerade der Fläche oder kein geometrisches Gebilde.

Damit ist die oben ausgesprochene Behauptung bewiesen.